Критерии проверки

Общие указания по проверке

1. Решение каждой задачи оценивается целым числом баллов от 0 до 7. Максимально возможный балл за работу 35 баллов.

2. При оценке решений учитываются только их правильность, обоснованность, полнота, самостоятельность выполнения работы, наличие в решениях ключевых идей. Для оценивания решения на максимальный балл от участника требуется полное обоснование. Считать или нет необоснованный переход очевидным, решает жюри муниципального этапа ВсОШ по математике. При этом **нельзя требовать от участника большего уровня строгости, чем принят в обычной школьной практике**.

Ни при каких обстоятельствах **нельзя снижать оценку за нетиповое оформление решения, исправления, помарки, «нерациональность»** решения.

Одна и та же задача может быть решена многими способами. Способ, которым решал задачу участник, может быть неизвестен жюри до начала проверки работы участника.

3. Оценивается **только написанное решение на чистовике**. Черновик не рассматривается. Аргументом в пользу удовлетворения апелляции не могут быть ни черновик, ни идеи участника, которые он придумал после того, как сдал работу.

4. Отдельные факты (например, неравенства о средних), используемые в олимпиадной практике, могут считаться известными фактами и приниматься без доказательства (т.е. при отсутствии доказательства таких фактов оценка не снижается) **при условии точной формулировки**.

Список таких фактов остаётся на усмотрение жюри муниципального этапа ВсОШ по математике, и не может быть сколько-нибудь широким. Участникам рекомендуется формулировать и доказывать все необходимые им факты, выходящие за рамки школьного учебника для соответствующего возраста.

5. Участники олимпиады могут **формулировать собственные определения**, давать собственные названия тем или иным объектам или методам в условии или в собственном решении задачи; единственное ограничение на такую деятельность – нельзя использовать

термины, уже зарезервированные в математике или в условии задачи. Например, натуральное число, сумма цифр которого делится на 6, а первая цифра чётна, участник олимпиады имеет право назвать красивым, но не имеет права назвать иррациональным.

Участники олимпиады могут **формулировать вспомогательные утверждения** (леммы), доказывая их как сразу после того, как сформулировали, так и позднее.

6. Оценивание олимпиадных работ по математике – творческий процесс, для которого **не существует полного набора инструкций**. В то же время у проверяющего ни в одной ситуации **нет выбора, какую оценку выставлять**: для любой задачи в любой олимпиадной работе есть лишь одна оценка, которую можно выставить за эту задачу.

Жюри муниципального этапа ВсОШ по математике в ходе проверки обязано руководствоваться настоящими критериями с целью унификации проверки. Унификация проверки необходима во всех классах с 7 по 11 для формирования рейтинга участников муниципального этапа ВсОШ.

7. При оценивании решения задачи, как правило, сначала даётся ответ на вопрос, **являются ли рассуждения участника решением** (хотя, возможно, с различными недостатками), или не являются (хотя, возможно, с существенным продвижением). В первом случае оценка должна быть не ниже 4 баллов, во втором не выше 3 баллов.

Решение, выполненное более, чем наполовину, считается существенно неполным (и может быть оценено в 4 балла) в следующих случаях:

содержит основные нужные идеи, но не доведено до конца;

состоит в разборе нескольких случаев, причём хотя бы один существенный случай упущен или разобран неверно;

состоит из двух частей (например, доказательства необходимости и достаточности либо доказательства оценки и построения примера), из которых верно выполнена только одна часть, причём более сложная.

Также решение может быть оценено в 4 балла, если оно доведено до конца, но при верной общей схеме рассуждений явно или скрыто опирается на важные недоказанные утверждения, которые нельзя считать известными или очевидными.

8. За верное решение, содержащее **небольшие ошибки или недочёты**, как правило, ставится от 5 до 7 баллов в зависимости от количества, вида (принципиальные или технические) и масштаба ошибок и недочётов.

Оценивая олимпиадные работы, **следует отличать принципиальные** (прежде всего – логические) **ошибки от технических** (например, техническими являются вычислительные ошибки в не вычислительной задаче). Технические ошибки, не искажающие логику решения, следует приравнивать к недочетам.

Неверное, неточное или некорректное использование определений, утверждений из школьной программы, **не искажающее логику решения**, приравнивается к недочётам.

Наличие вычислительной ошибки в не вычислительной задаче **снижает оценку за решение задачи на 1 балл**. При наличии большего количества вычислительных ошибок допускается суммарное снижение оценки более, чем на 1 балл, по сравнению с аналогичным решением, в котором вычислительные ошибки отсутствуют; при этом **не допускается оценивание работы ниже, чем стоимость части решения, выполненной безошибочно**.

9. Если **в решённой** геометрической задаче рассуждения участника не могут быть без изменений (т.е. без замен сумм длин отрезков или углов на разности, без рассмотрения разных случаев знаков, ...) перенесены на не рассмотренные случаи взаимного расположения геометрических объектов, обычно оценка **снижается на 2 балла** по сравнению с ситуацией, когда все случаи разобраны (или когда рассуждения без изменений верны для всех случаев).

В задачах с алгебраической частью обычно оценка **снижается на 2 балла** за **не рассмотрение случаев, когда знаменатели дробей равны 0** (если в ходе решения появляются знаменатели, содержащие неизвестные величины).

10. В решении комбинаторных задач неверное вычисление тех или иных величин при отсутствии достаточных пояснений (почему совершаются именно эти действия) является принципиальной ошибкой. Если же пояснения приведены, подстановка величин в формулы верно выполнена, а ошибка в вычислительной части, то в этом случае ошибка считается технической.

Тем же способом можно оценивать текстовые алгебраические задачи.

11. В случае отсутствия верного решения оцениваются **продвижения** (например, верно выполнена более лёгкая из двух частей решения). Продвижения, как правило, оцениваются баллами от 0 до 3 в зависимости от величины продвижения. **Большинство продвижений, которые можно оценивать ненулевыми баллами, приведено в критериях**.

Верный ответ всегда оценивается в 0 баллов. От участника требуются полные правильные рассуждения, доказывающие ответ.

Все утверждения, необходимые участнику для решения задачи, требуется доказывать.

Рассмотрение **частного случая** вместо решения задачи в общем случае, как правило, оценивается в **0 баллов**.

Если в решении разбирается несколько **равноправных общих случаев**, ошибочное рассмотрение или упущение нескольких случаев (если эти случаи не являются наиболее очевидными из всех рассматриваемых) оценивается в **0 баллов за задачу**.

12. Во многих ситуациях применяется следующее правило оценивания.

Сначала выставляются баллы за продвижения при решении задачи. При оценке продвижений, как правило, рассматриваются только продвижения, описанные в выполненных в работе критериях, и из них выбирается максимальное (**оценка за задачу уменьшается до ближайшего выполненного критерия**).

Это правило следует применять осторожно: у участника могут быть существенные продвижения, не описанные в критериях, не делающие задачу решённой, за которые в зависимости от их полезности для решения задачи можно поставить 1-2 дополнительных балла сверх максимального из выполненных критериев. Эта ситуация редкая, но возможная.

В геометрических задачах на доказательство часто ближайшим выполненным критерием является полное отсутствие решения (0 баллов). **Не финишированные решения** геометрических задач на доказательство обычно ненулевыми баллами не оцениваются.

Затем из баллов, набранных на продвижениях, **вычитаются баллы за имеющиеся недостатки**.

13. Баллы за небольшие продвижения (такие, что сумма стоимости продвижений не более 3 баллов) обычно суммируются. 3 балла – это пограничный балл для не решённой задачи. Если сумма баллов за продвижения больше 3 баллов, но **задача не решена**, баллы за продвижения обычно **не суммируются** (об этом упоминается в критериях проверки конкретной задачи); в этом случае оценкой за задачу является **наибольшая из оценок за продвижения**. Данное правило не применяется в задачах, решение которых естественным образом разбивается на две части (например, пример + оценка); в таких задачах суммирование продвижений происходит всегда.

Штрафы за ошибки суммируются. При большом количестве разноплановых ошибок (вычислительные, опора на недоказанные утверждения, потеря случаев, отсутствие не сложных частей рассуждения, ...) даже в случае решённой задачи оценка может быть ниже 4 баллов (это пограничный балл для решённой задачи).

14. Если решение избыточно (т.е. некоторые из сформулированных и доказанных в решении утверждений можно исключить из решения без ущерба для логики рассуждений), наличие ошибок в избыточной части решения **не является основанием для снижения оценки**.

15. Если в неаккуратно оформленном (математически неряшливом) решении **не удаётся однозначно восстановить ход рассуждений участника**, то ставится минимально возможная оценка (как правило, **0 баллов**). Минимум рассматривается по всем возможным способам рассуждения, которые могли быть в этом решении. На апелляции аргументы участника, связанные с ходом его рассуждений, в этом случае во внимание не принимаются.

Неаккуратно оформленными часто являются решения задач на разрезание (некоторые линии проведены не чётко, или сделан один рисунок поверх другого) и геометрических задач на доказательство (последовательность шагов доказательства выписана небрежно, в несколько рядов, некоторые шаги пропущены). Также часто участники неаккуратно оформляют вычислительные и комбинаторные задачи. По неаккуратному решению участника иногда не удаётся восстановить порядок выводов или ход расчётов, а значит, и логику решения.

Если решение восстановить всё же удаётся, но **восстановление решения сопряжено с неочевидной работой проверяющего** по выявлению хода рассуждений, связанной с неаккуратным оформлением работы, допускается незначительное снижение оценки по сравнению с ситуацией, когда ход рассуждений участника легко восстанавливается.

16. Если в задаче требуется построить пример (или если задача на пример + оценку), участник, как правило, должен **проверить, что пример непротиворечив и удовлетворяет условию задачи**; при отсутствии проверки оценка может быть снижена в соответствии с критериями по задаче.

В игровых задачах от участника требуется не только предъявить стратегии игроков, но и доказать, что они **в случае следования стратегии добьются нужного результата** (например, выиграют в игре) **при любых действиях соперников**. Кроме того, необходимо проверить, что игроки всегда **могут сделать ход согласно своей стратегии**.

17. Если по проверке какой-либо задачи региональная методическая комиссия дала **конкретные указания** (например, «за такую-то ошибку снимать столько-то баллов»), эти указания имеют **более высокий приоритет по сравнению с общими указаниями** по проверке.

18. В ходе проверки могут встретиться **ситуации, не описанные в критериях**. В этом случае решение по оцениванию самостоятельно принимается жюри муниципального этапа ВсОШ по математике в соответствии со следующими принципами.

За более значительное продвижение (или менее значительный недостаток) по сравнению с ситуацией, описанной в критериях, ставится не меньший балл, чем в ситуации, описанной в критериях.

За более значительное продвижение (или менее значительный недостаток) по сравнению с другой работой ставится не меньший балл, чем в другой работе.

За менее значительное продвижение (или более значительный недостаток) по сравнению с ситуацией, описанной в критериях, ставится не больший балл, чем в ситуации, описанной в критериях.

За менее значительное продвижение (или более значительный недостаток) по сравнению с другой работой ставится не больший балл, чем в другой работе.

Одинаковые решения оцениваются одинаковыми баллами.

Жюри муниципального этапа ВсОШ по математике **может самостоятельно формулировать дополнительные критерии**, соответствующие этим принципам, в случае выявления как повторяющихся, так и единичных ситуаций в ходе проверки, не описанных в априорных критериях.

Ответы, решения, комментарии

7 класс

1. **Ответ**: 6 лжецов. **Первое решение**. Заметим, что у рыцарей на карточках разные числа. Поэтому все рыцари дали разные ответы. Разных ответов всего 4, поэтому рыцарей не больше четырёх. Остальные – лжецы, их не меньше 6.

Пример: те, у кого на руках соответственно карточка с числом 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, сказали, что у них соответственно карточка с числом 1, 2, 3, 4, 1, 2, 3, 1, 2, 1. Тогда первые четверо сказали правду, остальные солгали.

Второе решение. Заметим, что из четверых, сказавших, что у них карточка с числом 1, соглали минимум трое (так как карточка с числом 1 всего одна). Аналогично проверяется, что среди сказавших, что у них карточка с числом 2, солгали минимум двое, а среди сказавших, что у них карточка с числом 2, солгал минимум один человек. Всего солгавших по крайней мере шестеро.

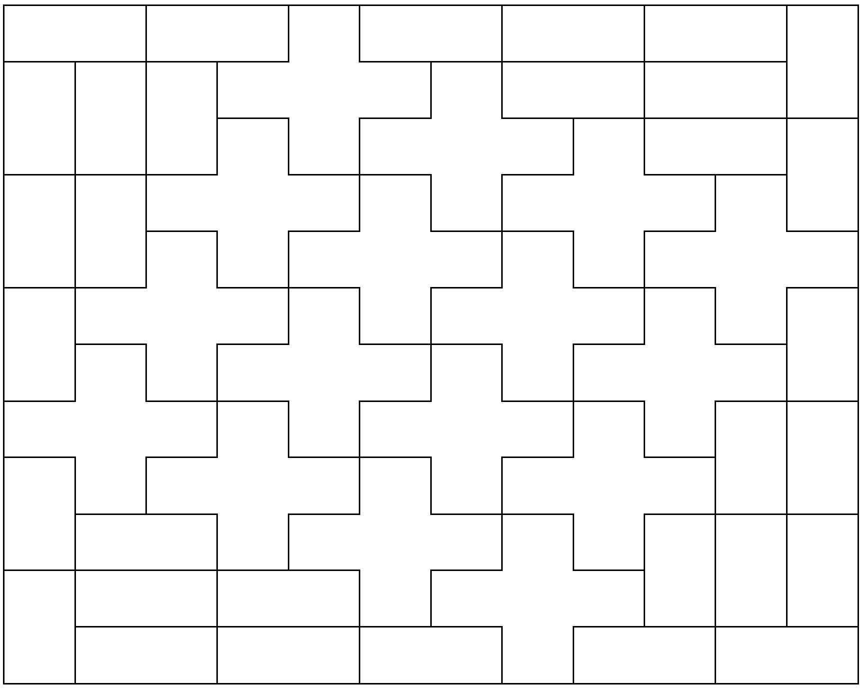
Пример: те, у кого на руках соответственно карточка с числом 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, сказали, что у них соответственно карточка с числом 1, 2, 3, 4, 1, 1, 1, 2, 2, 3. Тогда первые четверо сказали правду, остальные солгали.

2. **Ответ**: 12 способов. **Решение**. Расставить единицы можно 6 способами. В самом деле, в верхней строке единицу можно поставить на любое из трёх мест; после этого в средней строке единицу можно поставить на любое из двух мест (нельзя ставить в столбец, в который поставлена первая единица); наконец, в нижнюю строку единицу можно поставить одним способом (в столбец, в котором ещё нет единиц). Всего $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ способов расставить единицы.

Пусть единицы расставлены. В верхнюю строку поставить числа 2 и 3 можно двумя способами (их можно только менять местами). Нетрудно видеть, что как только в верхнюю строку поставили 2 и 3, остальные числа в таблице можно расставить единственным способом. Сначала заполняем оставшиеся клетки в тех столбцах, в которые поставлены числа 2 и 3 в верхней строке. Затем заполняем оставшиеся клетки в средней и нижней строках. В каждом таком ряду два числа заполнены, оставшееся можно выбрать одним способом.

3. **Ответ**: могло. **Решение**. См. рисунок. Площадь 16 крестов равна 80 клеткам, что больше, чем половина площади квадрата (144 клетки). Есть и другие решения.

Комментарий. Пятиклеточными крестами можно замостить плоскость (так, как выполнено замощение в центре квадрата на рисунке).



4. **Решение**. Распределим 16 яблок в восемь пар и взвесим яблоки в каждой паре. Восемь яблок, оказавшихся более тяжёлыми в своих парах (будем называть их победителями в парах), распределим в четыре пары и взвесим яблоки в каждой паре. Четырёх победителей в этих взвешиваниях распределим в две пары и взвесим яблоки в парах. Наконец, два яблока, победившие в последних взвешиваниях, взвесим между собой, и найдём самое тяжёлое яблоко (назовём его чемпионом). Для определения чемпиона нам понадобилось 8 + 4 + 2 + 1 = 15 взвешиваний.

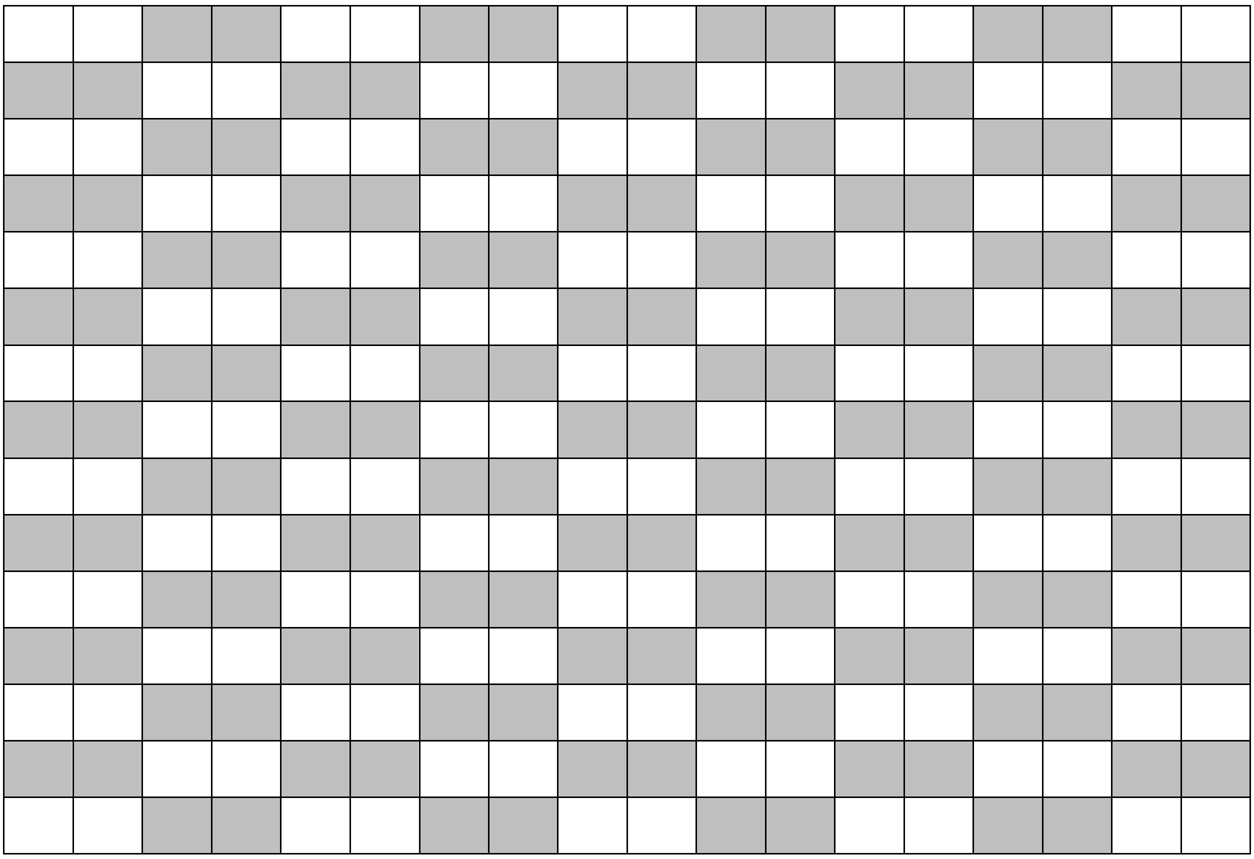
Второе по массе яблоко могло проиграть только чемпиону. Так как чемпион участвовал в четырёх взвешиваниях, то яблок, которые могут претендовать на второе место, четыре. Проведём для них отдельный турнир: каждый раз будем взвешивать двух претендентов на второе место, причём более лёгкое из двух яблок выбывает из дальнейшей борьбы за второе место, а более тяжёлое взвешивается со следующим претендентом. Для определения второго из самых тяжёлых яблок нам понадобится 3 взвешивания.

Всего мы сделали 15 + 3 = 18 взвешиваний.

5. **Ответ**: не может. **Первое решение**. Предположим, что коробку можно заполнить кирпичами. Повернём коробку так, чтобы её дно было 15 х 18 см. Заполним коробку кирпичами. Выложим часть кирпичей из коробки, оставив только те кирпичи, которые касаются дна. Обведём оставшиеся кирпичи. В результате дно коробки окажется разбито на прямоугольники четырёх видов (1 х 4 см, 4 х 4 см, 2 х 2 см и 2 х 6 см), являющиеся

гранями кирпичей. Заметим, что площади всех граней, выраженные в квадратных сантиметрах, делятся на 4. Но тогда и площадь дна должна делиться на 4. Но $15 \cdot 18 = 270$ не делится на 4. Полученное противоречие доказывает невозможность заполнения коробки кирпичами.

Второе решение. Разделим коробку на кубические ячейки со стороной 1 см. Повернём коробку так, чтобы её дно было 15 х 18 см. Покрасим клетки дна как на рисунке. Заметим, что покрашенных клеток на две меньше, чем не покрашенных. Во все кубические ячейки, расположенные над покрашенными клетками, нальём краску. Заметим, что ячеек, в которых залита краска (мы будем называть такие ячейки покрашенными), меньше, чем остальных ячеек (не покрашенных), на два столбика по 32 ячейки в каждом.



Теперь заметим, что как бы мы не расположили любой из кирпичей (так, что его границы проходят по границам ячеек), он будет занимать равное количество покрашенных и не покрашенных ячеек. Все кирпичи вместе будут занимать закрашенных и не закрашенных ячеек поровну; если требуемое заполнение возможно, то в коробке должно быть тех и других ячеек поровну. Полученное противоречие доказывает невозможность заполнения.

Приведённая в этом решении пространственная раскраска не единственная, с помощью которой можно решить эту задачу; остальные раскраски более сложные.

Третье решение является вариацией второго решения. Идея третьего решения такова. В покрашенные ячейки напишем числа 1, а в не покрашенные – числа -1. Тогда сумма всех чисел в каждом кирпиче равна 0, а сумма всех чисел в коробке не равна 0. Из этих двух фактов можно вывести невозможность заполнения коробки кирпичами. Имеются и некоторые другие (более сложные) расстановки чисел (или масс ячеек; допускаются отрицательные массы), решающих задачу.

8 класс

1. **Ответ**: 75 плодов. **Решение**. Так как 48% от количества плодов составляют груши, то 48% от количества плодов – это целое число. 96% от количества плодов также целое число, так как оно вдвое больше, чем 48%. Но тогда и 4% от количества плодов – тоже целое число (это все плоды, которые не вошли в 96%). Поэтому количество плодов делится на 25. С учётом ограничения, заданного в условии задачи, количество плодов может быть равно 25, 50, 75 или 100. Далее мы рассмотрим эти возможности (см. таблицу).

Отметим также тот факт, что количество бананов и количество груш – числа разной чётности (они различаются на 23), поэтому общее количество бананов и груш должно быть нечётно. Кроме того, общее количество бананов и груш не меньше количества бананов, а количество бананов не меньше 23.

Всего плодов	Апельсины	Бананы + груши	
25	12	13	не подходит, так как бананов < 23
50	24	26	не подходит, так как бананов + груш чётно
75	36	39	возможно, подходит
100	48	52	не подходит, так как бананов + груш чётно

Из таблицы видно, что единственной возможностью может быть 75 плодов. В этом случае апельсинов 36, бананов 31, груш 8. Проверка показывает, что условия задачи выполнены.

2. **Ответ**: за 2 взвешивания. **Решение**. Сначала поместим на одну чашу весов гирю 6 г, а на другую чашу весов – гири 1 г, 2 г, 3 г. Если весы не в равновесии, то среди надписей заведомо есть неправильные. Пусть весы в равновесии. По итогам взвешивания гири распределены в три группы:

гиря, уравновесившая три гири, имеет массу 6 г;

две гири, не участвовавшие во взвешивании, - 4 г и 5 г (но мы не знаем, которая из них 4 г, а которая 5 г);

три гири, уравновешенные гирей 6 г, имеют массы 1 г, 2 г, 3 г (но мы не знаем, какая из них какой массы).

Вторым взвешиванием на одну чашу весов поместим гири 6 г и 1 г, на другую чашу весов – гири 3 г и 5 г. Если весы уравновесились, или тяжелее оказались гири 6 г и 1 г, то среди надписей заведомо есть неправильные. Пусть перевесили гири 3 г и 5 г. Докажем, что в этом случае все надписи верные. В самом деле, гири с надписями 3 г и 5 г имеют массы не более 3 г и 5 г соответственно, т.е. их общая масса не больше 8 г; общая масса гирь 1 г и 6 г не меньше, чем 1 + 6 = 7 г. Единственная возможность для того, чтобы гири с надписями

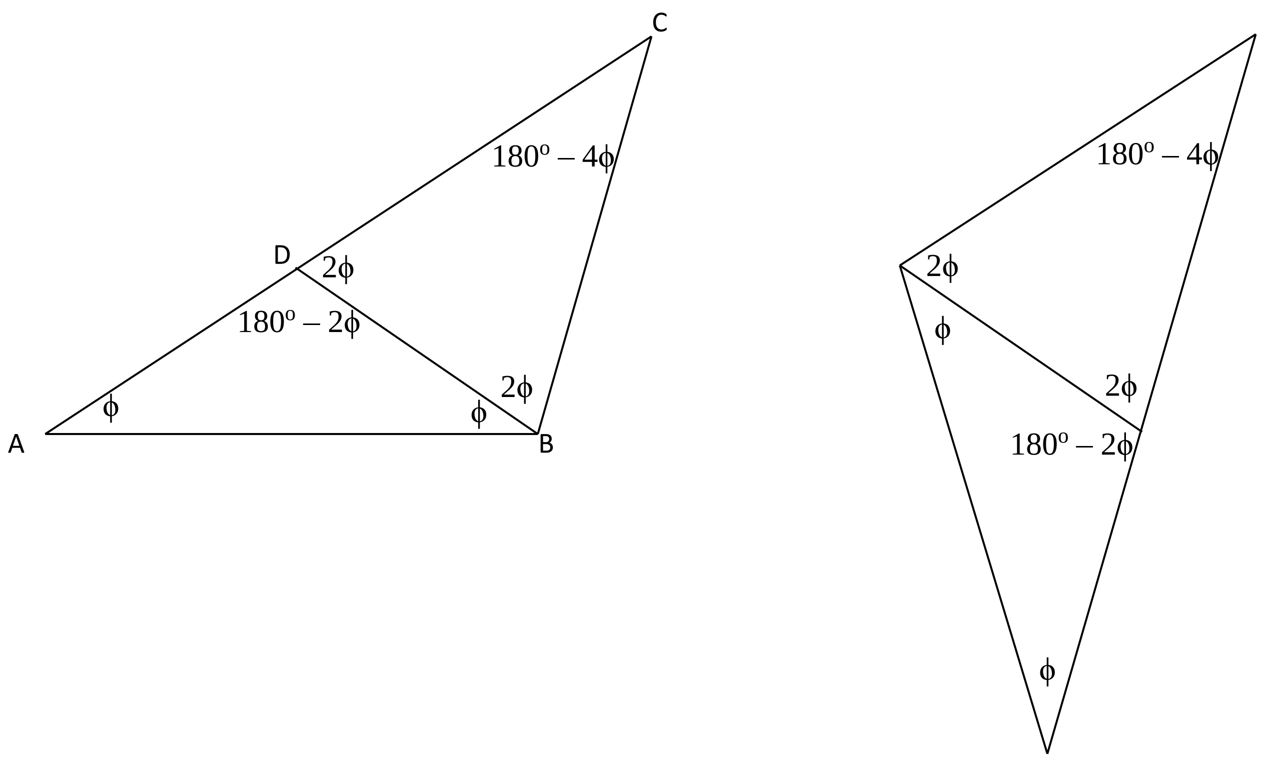
3 г и 5 г перевесили гири с надписями 1 г и 6 г, состоит в том, что гири с надписями 3 г и 5 г имеют суммарную массу 8 г, а гири с надписями 1 г и 6 г – суммарную массу 7 г. В этом случае все надписи на гирях, участвующих во втором взвешивании, верные; массы остальных двух гирь легко находятся (так как известно, в какие группы они входят).

Докажем, что для выяснения требуемого одного взвешивания не достаточно. Будем рассуждать от противного. Предположим, что с помощью некоторого взвешивания удаётся определить, что в некоторой ситуации все надписи верные. Выполним это взвешивание. Тогда либо на левой чаше весов не меньше двух гирь, либо на правой чаше весов не меньше двух гирь, либо не участвует во взвешивании не меньше двух гирь. Если переклеить надписи в какой-нибудь из этих трёх групп гирь (в той, где гирь больше одной), то мы не сможем с помощью данного взвешивания отличить эту ситуацию от ситуации, когда все надписи правильные, потому что в этих ситуациях на чашах весов находятся одни и те же гири. При этом могло быть так, что в одной из этих ситуаций все надписи верные.

3. **Решение**. Пусть углы A и B треугольного торта ABC, отличающиеся втрое, равны соответственно ϕ и 3ϕ (см. левый рисунок). Проведём луч BD, который разделит угол ABC на два угла: $\angle ABD = \phi$ и $\angle DBC = 2\phi$. Тогда треугольник ABD равнобедренный (AD = DB).

$\angle ADB = 180^o - \angle ABD - \angle BAD = 180^o - 2\phi$, поэтому смежный с ним $\angle BDC = 2\phi$. Треугольник BCD равнобедренный (BC = CD).

Разрежем торт ABC по отрезку BD на две части. Сторону BD треугольника BCD совместим со стороной AD треугольника ABD (см. правый рисунок). Нетрудно видеть, что фигура, образовавшаяся после совмещения сторон, является треугольником (так как сумма углов 2ϕ и $180^o - 2\phi$ равна 180^o, а AD = BD).

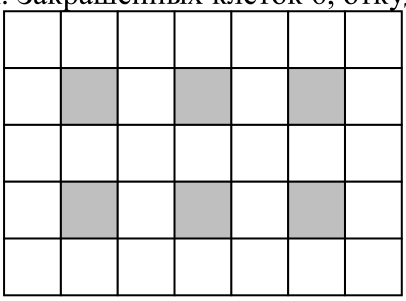


4. **Ответ**: существует. **Решение**. Подходят числа 63 и 89 (а других натуральных чисел с данным свойством нет). Проверим, что число 89 подходит. Предположим противное – пусть при некотором $k \in \{1, 2, ..., 89\}$ число $89k$ оканчивается на две одинаковые цифры. Число с двумя одинаковыми цифрами на конце представимо в виде $100a + 11b$, где b – любая из двух последних цифр числа. Пусть $89k = 100a + 11b$, где $k \leq 89$. Равенство перепишем в виде $100k - 11k = 100a + 11b$, или $100 (k - a) = 11 (b + k)$. Правая часть последнего равенства делится на 100. Так как 11 и 100 взаимно просты, $b + k$ делится на 100. Но $b \leq 9$, $k \leq 89$, поэтому $b + k < 100$. Кроме того, $k \geq 1$, $b \geq 0$, и $b + k > 0$. Противоречие.

Как можно найти число 89? Искомым числом не может быть число, в котором больше двух цифр (так как после умножения на 100 получается число с двумя нулями на конце). Не может быть чётное число (так как после умножения чётного числа > 50 на 50 получается число с двумя нулями на конце). Не может быть число, которое делится на 5 (так как после умножения на 20 также получается число с двумя нулями на конце). Проверяя числа от 51 до 99, оканчивающиеся на 1, 3, 7, 9, обнаруживаем, что двумя одинаковыми цифрами оканчиваются $99 \cdot 1 = 99$, $97 \cdot 4 = 388$, $93 \cdot 8 = 744$, $91 \cdot 5 = 455$. Наибольшее из не проверенных чисел 89, оно удовлетворяет условию задачи.

Комментарий. Весь список двузначных чисел, для которых выполнено свойство из условия задачи: 13, 14, 15, 26, 27, 39, 63, 89.

5. **Ответ**: нельзя. **Первое решение**. Заметим, что каждая из фигур содержит квадрат 2 x 2, а каждый квадрат 2 x 2, вырезанный из прямоугольника 5 x 7, содержит закрашенную клетку (см. рисунок). Поэтому можно вырезать не больше фигур, чем имеется закрашенных клеток. Закрашенных клеток 6, откуда и следует ответ.



Второе решение. Пусть вырезание возможно. Рассмотрим столбцы 2-й, 4-й, 6-й слева. Каждая фигура имеет не менее двух общих клеток по крайней мере с одним из перечисленных столбцов; будем говорить, что в этом случае фигура заметно представлена в столбце. В каждом столбце заметно представлено не более двух фигур, а всего в трёх перечисленных столбцах – не более шести фигур. С другой стороны, фигур должно быть семь, и каждая заметно представлена в каком-то из перечисленных столбцов. Противоречие.

Идея третьего решения. Аналогично можно рассуждать про заметную представленность во 2-й и 4-й строках.

Кроме перечисленных решений, также возможны различные переборные решения и, возможно, некоторые другие.

9 класс

1. **Ответ**: 119. **Решение**. Равенство из условия задачи нетрудно преобразовать к виду $(3x – 17)^2 + (4y^3 – 16)^2 = 0$. Так как сумма квадратов равна 0, каждый из квадратов равен 0, а значит, $3x – 17 = 0$ и $4y^3 – 16 = 0$. Из первого уравнения находим $9x = 51$, из второго уравнения $y^3 = 4$. Тогда $9x + 17y^3 = 51 + 68 = 119$.

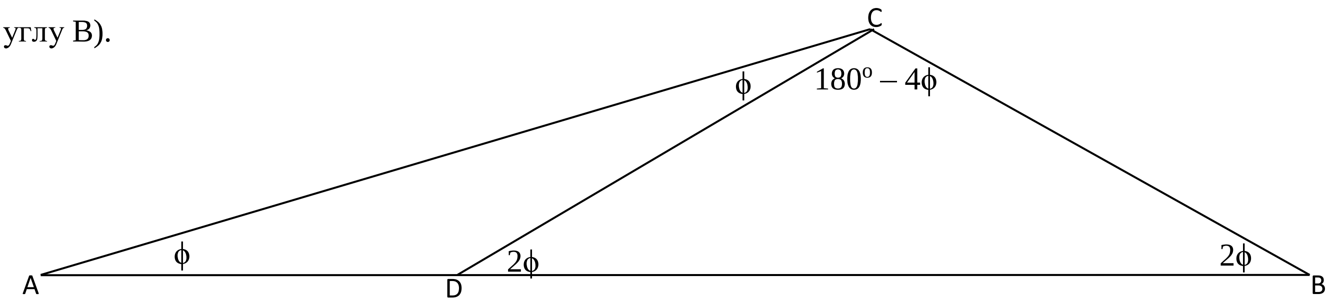
2. **Ответ**: существуют. **Решение**. Подойдёт, например, такой набор чисел:
$2^1 \cdot 3^{4045}, 2^3 \cdot 3^{4043}, 2^5 \cdot 3^{4041}, 2^7 \cdot 3^{4039}, 2^9 \cdot 3^{4037}, ..., 2^{4045} \cdot 3^1$. Показатель степени двойки при переходе к следующему числу растёт на 2, а показатель степени тройки уменьшается на 2.

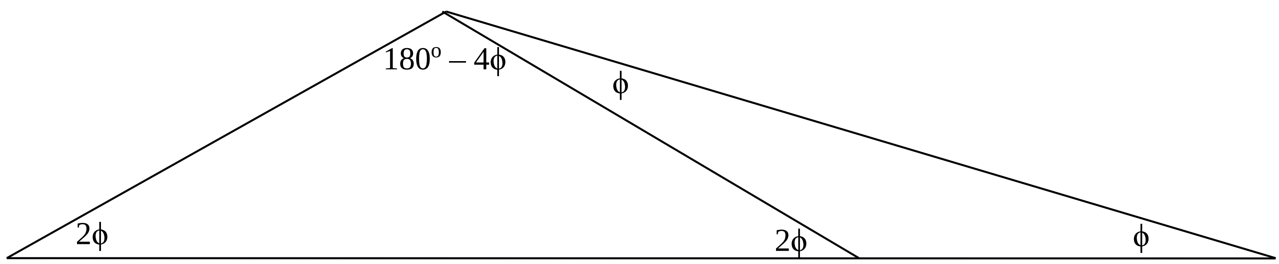
Каждое число в этом примере является произведением 4046 простых чисел – двоек и троек, причём все числа различны. Записав частное любых двух из них в виде дроби, в которой в числителе и в знаменателе произведение 4046 простых множителей, замечаем, что в процессе сокращения все множители знаменателя сократиться не могут, а значит, никакое из чисел в построенном примере не делится ни на какое другое число из примера. Степени у двоек и троек нечётны, поэтому все числа из примера – не квадраты, а произведение любых двух чисел из примера – квадрат.

Есть и другие примеры.

3. **Первое решение**. Пусть углы A и B треугольного торта ABC, отличающиеся вдвое, равны соответственно ϕ и 2ϕ (см. верхний рисунок). Так как угол B по условию задачи острый, $2\phi < 90^o$, а значит, $4\phi < 180^o$, т.е. $\phi < 180^o – 3\phi$.

Поэтому угол C, равный $180^o – (\angle A + \angle B) = 180^o – 3\phi$, можно разделить на два угла, один из которых ϕ. Для этого проведём луч CD такой, что $\angle ACD = \phi$, причём точка D лежит на стороне AB. Треугольник ACD равнобедренный ($\angle A = \angle C = \phi$), треугольник BCD также равнобедренный (угол BDC как внешний для треугольника ADC равен $\phi + \phi = 2\phi$, т. е. равен углу B).





$\angle ADC = 180^o - (\angle A + \angle ACD) = 180^o - 2\phi$, кроме того, AD = DC = CB из равнобедренных треугольников. Поэтому треугольник ADC можно приставить к треугольнику BCD с другой стороны, как показано на нижнем рисунке.

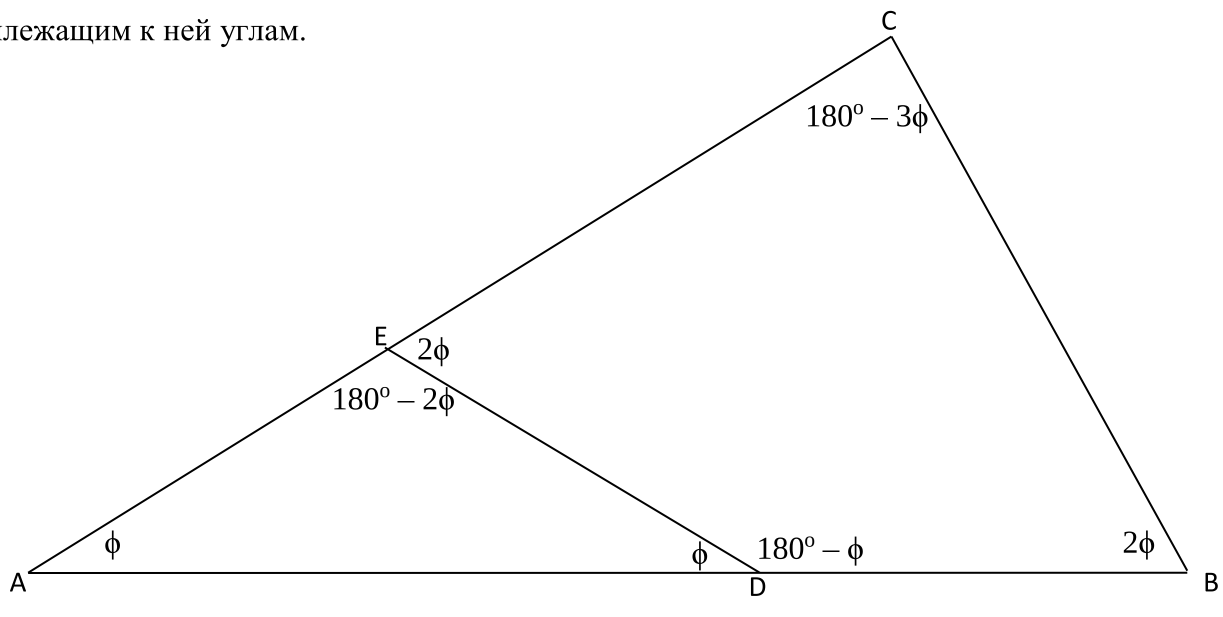
Второе решение подходит для произвольных треугольных тортов, у которых один из углов вдвое больше другого.

Пусть углы A и B треугольного торта ABC, отличающиеся вдвое, равны соответственно ϕ и 2ϕ (см. рисунок); так как $\phi + 2\phi < 180^o$, то $\phi < 60^o$ и тем более $\phi < 90^o$. На луче AC отложим отрезок AE, длину которого укажем позднее. На луче AB построим точку $D \neq A$ такую, что AE = ED. Наконец, на луче AD за точкой D должна располагаться точка B так, что AE = ED = DB.

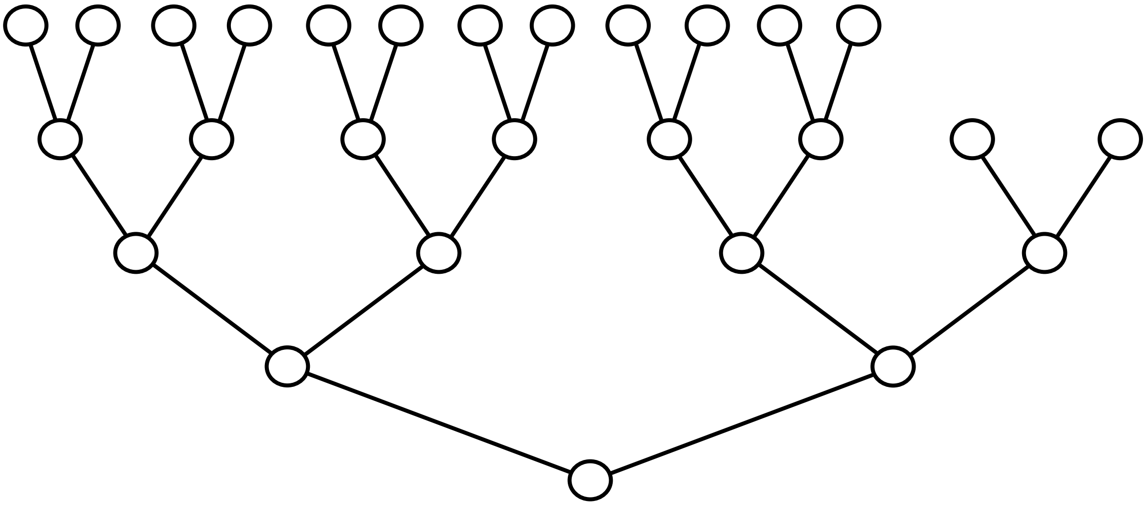
Пусть BD = x, тогда $AD = 2x \cdot \cos\phi$ (для доказательства этого утверждения проведём высоту EH в треугольнике ADE и заметим, что $AH = HD = x \cdot \cos\phi$), а значит, должно выполняться равенство $x + 2x \cdot \cos\phi = AB$, откуда $AE = ED = BD = AB / (1 + 2\cos\phi)$.

Разрежем торт по отрезку ED и приставим треугольную часть так, чтобы сторона AE совпала с DB. Нетрудно видеть, что после перемещения треугольной части углы B и D станут равны соответственно $2\phi + (180^o - 2\phi) = 180^o$ и $\phi + (180^o - \phi) = 180^o$, т.е. образовавшаяся фигура является треугольником. Углы этого треугольника равны $180^o - 3\phi$, 2ϕ и ϕ, т.е. совпадают с углами исходного торта. Поэтому торт после перемещения частей подобен исходному. Так как в процессе перестановки частей площадь не изменилась, образовавшийся треугольный торт равен исходному.

Доказать последнее утверждение можно и другими способами. Например, можно установить равенство треугольников по стороне, противолежащей углу C, и по двум прилежащим к ней углам.



4. **Решение**. Изобразим кружочки, соединённые отрезками: в нижний ряд поместим один кружочек, во второй внизу ряд два кружочка, в третий четыре, в четвёртый 8, в пятый 16, в шестой 32, в седьмой 64, в восьмой 72. В каждом ряду (кроме самого нижнего, где один кружочек), двигаясь слева направо, разобьём кружочки на пары соседних. Соединим кружочки очередной пары с самым левым кружочком соседнего снизу ряда, с которым ещё ничего не соединено. Получим рисунок, похожий на следующий (но с большим количеством кружочков):



Заметим, что кружочков, из которых не идут линии вверх (их мы будем называть листьями, а всю конструкцию – деревом), ровно 100. В самом деле, 72 кружочка верхнего ряда соединены с 36 левыми кружочками второго сверху ряда. Во втором сверху ряду осталось 64 – 36 = 28 кружочков, из которых не идут линии вверх. 72 + 28 = 100.

Поместим в 100 листьев по яблоку. Двигаясь по рисунку сверху вниз, а в каждом ряду слева направо, будем делать следующее. Рассмотрим два кружочка, из которых идут линии к одному и тому же кружочку на ряд ниже. Взвесим два яблока, находящиеся в этих кружочках. Более лёгкое вернём на тот кружочек, где оно находилось, а более тяжёлое сдвинем по линии на кружочек, расположенный на ряд ниже. Можно считать, что система кружочков – это турнирная сетка наподобие турнирной сетки теннисного турнира. В каждом туре «встречаются» яблоки, участвующие во взвешиваниях. Более тяжёлое яблоко («победитель») «проходит в следующий тур». Самое тяжёлое яблоко будем называть чемпионом.

Заметим, что для определения чемпиона надо сделать 99 взвешиваний. В самом деле, в каждом взвешивании одно из яблок «проигрывает» и покидает турнир; чтобы осталось одно яблоко (чемпион), надо, чтобы проиграли остальные 99.

Второе по массе яблоко могло проиграть только чемпиону. Так как чемпион участвовал не более, чем в семи турах (всего строк с кружочками восемь, причём пары соперников на тур составляются в верхних семи строках), то яблок, которые могут претендовать на второе место, не больше семи. Проведём для них отдельный турнир: каждый раз будем взвешивать двух претендентов на второе место, причём более лёгкое из двух яблок будем возвращать в то место сетки основного турнира, откуда мы его взяли. Для определения второго из самых тяжёлых яблок нам понадобится не более 6 взвешиваний.

Третье по тяжести яблоко могло в основном турнире проиграть либо чемпиону (таких претендентов осталось не более 6, так как один из претендентов только что найден, он занимает второе место), либо яблоку, занявшему второе место (таких претендентов не более 6, так как одна из встреч у яблока, занявшего второго место, была с чемпионом). Из не более, чем 12 претендентов можно найти третье по тяжести яблоко за не более, чем 11 взвешиваний.

Всего мы сделали не более 99 + 6 + 11 = 116 взвешиваний.

5. **Ответ**: выиграет Алексей. **Первое решение**. Составим следующую таблицу.

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
0	–	+	+	–	–	+	+	–	–	+	+	–	–	+	+	–
1	–	–	+	+	–	–	+	+	–	–	+	+	–	–	+	+
2	+	–	–	+	+	–	–	+	+	–	–	+	+	–	–	+
3	+	+	–	–	+	+	–	–	+	+	–	–	+	+	–	–
4	–	+	+	–	–	+	+	–	–	+	+	–	–	+	+	–
5	–	–	+	+	–	–	+	+	–	–	+	+	–	–	+	+
6	+	–	–	+	+	–	–	+	+	–	–	+	+	–	–	+
7	+	+	–	–	+	+	–	–	+	+	–	–	+	+	–	–
8	–	+	+	–	–	+	+	–	–	+	+	–	–	+	+	–
9	–	–	+	+	–	–	+	+	–	–	+	+	–	–	+	+
10	+	–	–	+	+	–	–	+	+	–	–	+	+	–	–	+
11	+	+	–	–	+	+	–	–	+	+	–	–	+	+	–	–
12	–	+	+	–	–	+	+	–	–	+	+	–	–	+	+	–
13	–	–	+	+	–	–	+	+	–	–	+	+	–	–	+	+
14	+	–	–	+	+	–	–	+	+	–	–	+	+	–	–	+
15	+	+	–	–	+	+	–	–	+	+	–	–	+	+	–	
16	–	+	+	–	–	+	+	–	–	+	+	–	–	+		
17	–	–	+	+	–	–	+	+	–	–	+	+	–			
18	+	–	–	+	+	–	–	+	+	–	–	+				
19	+	+	–	–	+	+	–	–	+	+	–					
20	–	+	+	–	–	+	+	–	–	+						
21	–	–	+	+	–	–	+	+	–							
22	+	–	–	+	+	–	–	+								
23	+	+	–	–	+	+	–									
24	–	+	+	–	–	+										
25	–	–	+	+	–											
26	+	–	–	+												
27	+	+	–													
28	–	+														
29	–															

Каждая клетка таблицы – это одна из возможных игровых позиций. В заголовке столбца написано, сколько монет находится в красной шкатулке, а в заголовке строки – сколько монет находится в белой шкатулке. Так как монеты можно перекладывать из красной шкатулки в белую, то в белой шкатулке может оказаться до 29 монет.

Из каждой позиции разрешается перемещаться либо в позицию на две клетки левее (т.е. брать две монеты из красной шкатулки), либо в позицию на две клетки выше (т.е. брать две монеты из белой шкатулки), либо в позицию на соседнюю клетку по диагонали влево – вниз (т.е. перекладывать одну монету из красной шкатулки в белую).

Расставим в таблице знаки + и – по следующим правилам (знак «+» будет обозначать, что игрок, делающий ход из этой позиции, выиграет, если будет играть как можно лучше; знак «–» будет обозначать, что игрок, делающий ход из этой позиции, проиграет, если соперник будет играть наилучшим образом).

а) Если из позиции невозможно сделать ход, то эта позиция «–» (игрок, делающий ход из этой позиции, проиграл).

б) Если из позиции можно сделать ход в клетку, на которой стоит «–», то эта позиция «+» (игрок, делающий ход из этой позиции, выиграл, так как он может сделать ход в позицию, из которой соперник проиграл).

в) Если из позиции можно сделать ход, но все возможные ходы ведут в позиции с «+», то эта позиция «–» (игрок, делающий ход, проиграл, так как после любого его хода соперник выиграл).

г) Если из текущей позиции можно сделать ход в позицию, которая ещё не просчитана, то сначала надо просчитать ту позицию, и только потом текущую.

Из таблицы видно, что исходная позиция (в красной шкатулке 15 монет, в белой 14; далее мы будем записывать эту позицию (15; 14)) выигрышная для того, кто делает из неё ход. Поэтому Алексей выиграет. Он всегда должен делать один из таких ходов, после которого соперник проиграет. Из таблицы видно, что из любой клетки с плюсом можно сходить только в клетки с минусом. Т.е. Алексей выиграет независимо от того, какие ходы будут делать игроки.

Второе решение. Заметим, что игра закончится за конечное число ходов. В самом деле, рассмотрим величину $2R + W$, равную удвоенному количеству монет R в красной шкатулке плюс количество монет W в белой шкатулке. Величина $2R + W$ всегда целая неотрицательная, и с каждым ходом уменьшается по крайней мере на 1 (в самом деле, если взять монеты в карман, то уменьшится W или R, а если переложить монету из красной шкатулки в белую, то R уменьшится на 1, W увеличится на 1, $2R + W$ уменьшится на 1).

Заметим, что величина $R + W$ сохраняет чётность.

Наконец, заметим, что величина $3R + W$ изменяет остаток при делении на 4 следующим образом: если текущий остаток равен 0 или 1, то после любого хода он равен 2 или 3. И наоборот, если в данный момент он равен 2 или 3, то спустя ход он будет равен 0 или 1. Поэтому позиция, в которой $3R + W$ даёт остаток 0 или 1 при делении на 4, является проигрышной для игрока, делающего из неё ход, а позиция, в которой $3R + W$ даёт остаток 2 или 3 – выигрышной. Так как исходно $3R + W = 15 \cdot 3 + 14 = 59$ даёт остаток 3 при делении на 4, выиграет игрок, делающий ход первым (Алексей).

Третье решение. Заметим, что количество монет в двух шкатулках вместе всегда нечётно. В ситуации, когда нельзя сделать ход, в обеих шкатулках должно быть не более одной монеты (иначе из той шкатулки, где две монеты или больше, можно взять две); поэтому в конце останется одна монета. Она будет находиться в белой шкатулке (так как если она в красной, её можно переложить в белую, сделав ещё один ход).

Пусть из позиции (15, 14) в позицию (0, 1) сделано чётное количество ходов (т.е. победил Борис), из них A ходов по перекладыванию монеты из красной шкатулки в белую, B ходов, при которых игрок берёт себе две монеты из красной шкатулки, и C ходов, при которых игрок берёт себе две монеты из белой шкатулки. Тогда должны выполняться следующие условия:

$15 - A - 2B = 0$ (1)

$14 + A - 2C = 1$ (2)

$A + B + C$ чётно (3)

Складывая (1) и (2), получаем $29 - 2B - 2C = 1$, или $B + C = 14$. Так как $A = 15 - 2B$, то A нечётно, $A + B + C = A + 14$ нечётно, что противоречит (3).

10 класс

1. **Ответ**: неверно. **Решение**. Пусть c настолько мало, что все слагаемые, содержащие c, не вносят сколько-нибудь значительный вклад в сумму. Подберём a и b так, что $a^4b < a^3b^2$; достаточно взять a = 10, b = 100. Пусть теперь c = 0,000 000 01. Тогда

$a^4b + b^4c + c^4a = 10^6 + 1 + 10^{-31} < 1\,000\,002$,

$a^3b^2 + b^3c^2 + c^3a^2 = 10^7 + 10^{-10} + 10^{-22} > 10\,000\,000$,

т.е. левая часть неравенства меньше правой.

Комментарий. Если в каждую из частей неравенства добавить ещё по три слагаемых так, что симметрия вместо циклической (ничего не меняется после одновременной замены переменных $a \to b \to c \to a$) станет полной (а многочлены – симметрическими), неравенство $(a^4b + b^4c + c^4a) + (a^4c + b^4a + c^4b) \geq (a^3b^2 + b^3c^2 + c^3a^2) + (a^3c^2 + b^3a^2 + c^3b^2)$ будет верным при всех положительных (даже неотрицательных) a, b, c.

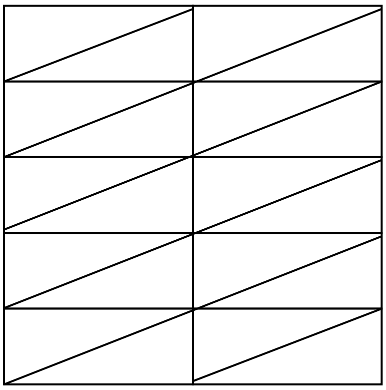
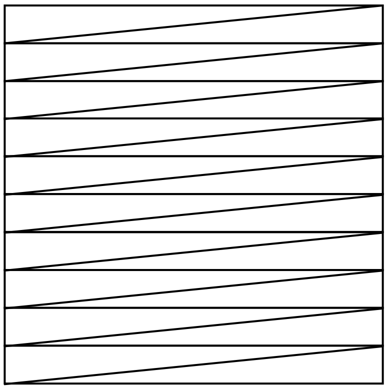
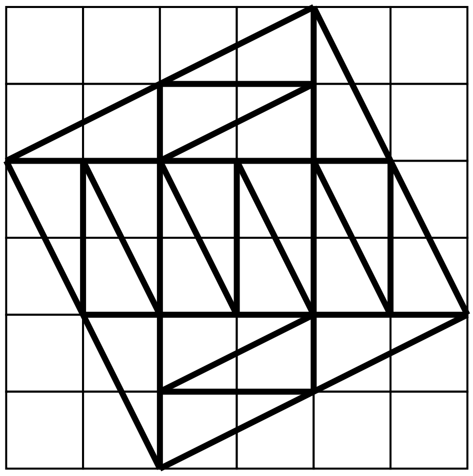
2. **Ответ**: не могут. **Решение**. Наибольшее число, которое можно составить (7654321), больше наименьшего (1234567) менее, чем в 7 раз. Поэтому, если составить семизначные числа требуемым образом удастся, частное от деления большего числа на меньшее будет не больше 6. Так как числа должны быть разными, частное не равно 1. Значит, оно может быть равно 2, 3, 4, 5 или 6.

Но оно не равно ни 3, ни 6, так как если бы было равно, то число Ани делилось бы на 3. Но сумма цифр числа Ани равна 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 = 28 даёт при делении на 3 остаток 1, поэтому число Ани при делении на 3 даёт остаток 1 (в самом деле, если мы уменьшим на 1 последнюю цифру числа Ани, то сумма цифр нового числа будет равна 27, и оно разделится на 3 по признаку делимости). Аналогично проверяется, что число Вики даёт остаток 1 при делении на 3.

Пусть частное от деления числа Ани на число Вики равно 2 или 5. Числа 2 и 5 имеют вид $3n + 2$ при целом n ($2 = 3 \cdot 0 + 2$, $5 = 3 \cdot 1 + 2$). Числа Ани и Вики дают остаток 1 при делении на 3, т.е. соответственно имеют вид $3m + 1$ и $3k + 1$ при некоторых целых m и k. Но тогда произведение числа Вики и частного от деления числа Ани на число Вики даёт остаток 2 при делении на 3, что не совпадает с остатком у числа Ани: $(3k + 1)(3n + 2) = 9kn + 6k + 3n + 2 = 3(3kn + 2k + n) + 2$. Итак, частные 2 и 5 получиться тоже не могли.

Рассмотрим оставшийся случай – частное от деления числа Ани на число Вики равно 4. Заметим, что цифра 7 в числе Вики не может быть последней (в этом случае число Ани заканчивалось бы на 8, но цифры 8 на карточках нет). Пусть после цифры 7 в числе Вики идёт цифра a, где a = 1, 2, 3, 4, 5 или 6. После умножения цифры 7 числа Вики на 4 в произведении появится либо цифра 8 (если не было переноса из предыдущего разряда), либо цифра 9 (если из предыдущего разряда перенесли 1), либо цифра 0 (если из предыдущего разряда перенесли 2), либо цифра 1 (если из предыдущего разряда перенесли 3). Так как цифр 8, 9, 0 на карточках нет, при умножении 7 на 4 в числе Ани должна быть цифра 1, но тогда произведение цифры а на 4 должно быть не меньше 30, что невозможно (а < 7, произведение меньше 28).

3. **Ответ**: барон может быть прав. **Решение**. Пусть сторона квадрата равна 10. Три разрезания показаны на рисунках. Все треугольники прямоугольные. На левом рисунке катеты треугольников равны 2 и 5; на среднем рисунке катеты треугольников равны 1 и 10; на правом рисунке сторона клетки равна $\sqrt{5}$, катеты треугольников равны $\sqrt{5}$ и $2\sqrt{5}$, гипотенузы треугольников равны 5.

4. **Ответ**: 288 способов. **Решение**. Числа в первой строке можно расставить $4! = 24$ способами. Пусть в первую строку поставили слева направо числа 1, 2, 3, 4 соответственно. Расставить единицы в остальных столбцах можно 3! способами (единица из второй строки может оказаться в любом из трёх столбцов, единица из третьей строки в любом из двух столбцов, единица из четвёртой строки в оставшемся столбце). Не умаляя общности, можно считать, что единицы расставлены как изображено на левом рисунке. Наконец, заметим, что в столбце, где уже поставлены единица и двойка, остальные два числа можно поставить $2! = 2$ способами. Таким образом, всего способов не менее $4! \cdot 3! \cdot 2! = 288$. Пусть числа 3 и 4 поставлены в столбец с двойкой и единицей как на левом рисунке.

1	2	3	4
	1		
	3	1	
	4		1

1	2	3	4
	1		
	3	1	2
	4	2	1

1	2	3	4
	1	4	3
4	3	1	2
3	4	2	1

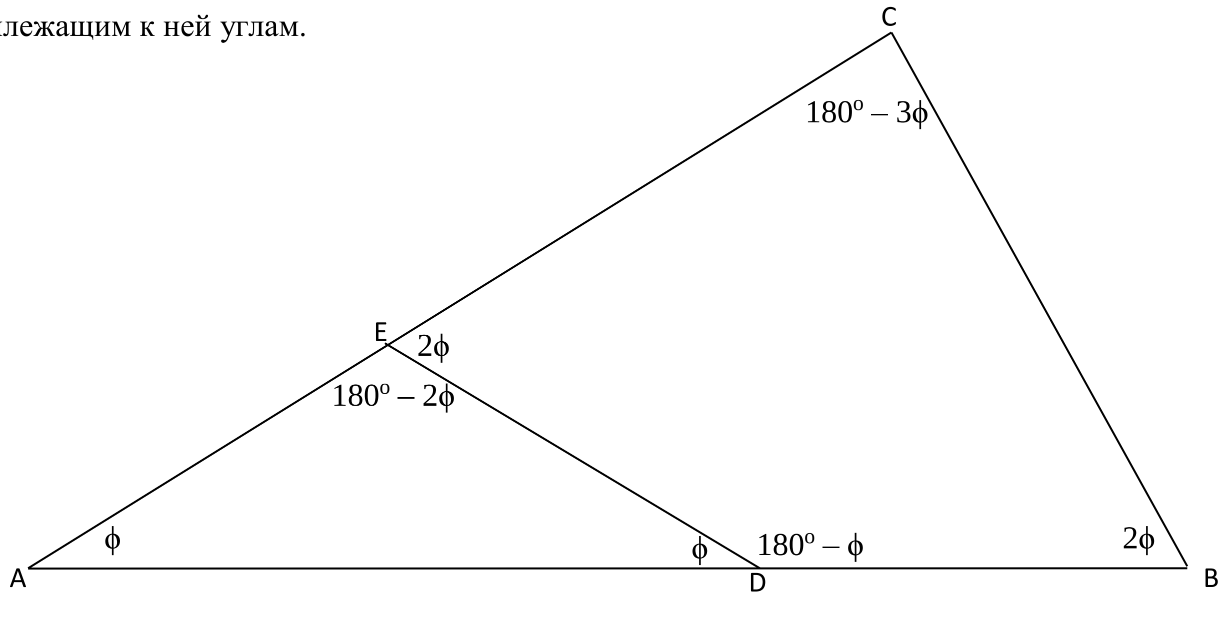
Докажем, что теперь остальные числа можно расставить единственным образом. Сначала поставим две двойки как на среднем рисунке – ведь в эти клетки больше ничего не поставить. Затем заполним две нижние строки и два правых столбца (см. правый рисунок). Затем – оставшуюся клетку.

5. **Решение**. Пусть углы A и B треугольного торта ABC, отличающиеся вдвое, равны соответственно ϕ и 2ϕ (см. рисунок); так как $\phi + 2\phi < 180^o$, то $\phi < 60^o$ и тем более $\phi < 90^o$. На луче AC отложим отрезок AE, длину которого укажем позднее. На луче AB построим точку $D \neq A$ такую, что AE = ED. Наконец, на луче AD за точкой D должна располагаться точка B так, что AE = ED = DB.

Пусть BD = x, тогда $AD = 2x \cdot \cos\phi$ (для доказательства этого утверждения проведём высоту EH в треугольнике ADE и заметим, что $AH = HD = x \cdot \cos\phi$), а значит, должно выполняться равенство $x + 2x \cdot \cos\phi = AB$, откуда $AE = ED = BD = AB / (1 + 2\cos\phi)$.

Разрежем торт по отрезку ED и приставим треугольную часть так, чтобы сторона AE совпала с DB. Нетрудно видеть, что после перемещения треугольной части углы B и D станут равны соответственно $2\phi + (180^o - 2\phi) = 180^o$ и $\phi + (180^o - \phi) = 180^o$, т.е. образовавшаяся фигура является треугольником. Углы этого треугольника равны $180^o - 3\phi$, 2ϕ и ϕ, т.е. совпадают с углами исходного торта. Поэтому торт после перемещения частей подобен исходному. Так как в процессе перестановки частей площадь не изменилась, образовавшийся треугольный торт равен исходному.

Доказать последнее утверждение можно и другими способами. Например, можно установить равенство треугольников по стороне, противолежащей углу C, и по двум прилежащим к ней углам.



11 класс

1. **Ответ**: больше количество способов разложить 12 гирек.

Решение. Рассмотрим любой способ разложить требуемым образом 11 гирек. Вместо гирьки 6 г поместим гирьку 12 г, а гирьку 6 г переложим на другую чашу весов. Весы останутся в равновесии, и мы получим способ разложить требуемым образом 12 гирек. Так как из разных способов разложить 11 гирек получаются разные способы разложить 12 гирек, то способов разложить 12 гирек не меньше.

Для того, чтобы доказать, что их больше, достаточно предъявить один способ, в котором гирьки 6 г и 12 г расположены на одной чаше. Этот способ не может быть получен ни из какого способа разложить 11 гирек с помощью действий, описанных в предыдущем абзаце.

Сумма масс всех гирек $1 + 2 + ... + 12 = (12 + 1) \cdot 12 : 2 = 78$ граммов, поэтому на одной из чаш весов должны располагаться гирьки суммарной массы 39 г, в том числе 6 г и 12 г. К ним можно добавить, например, 10 г и 11 г; тогда на другой чаше окажутся гирьки 1 г, 2 г, 3 г, 4 г, 5 г, 7 г, 8 г, 9 г.

Существуют и другие способы решения этой задачи.

2. **Ответ**: $m = n = 2$. **Решение**. $3^n = m^3 + 1 = (m + 1)(m^2 - m + 1)$. Первая скобка является делителем степени тройки, причём при натуральном m она больше 1; значит, $m + 1$ кратно 3, т.е. $m + 1 = 3a$ при некотором натуральном a.

Тогда $m^3 + 1 = (3a - 1)^3 + 1 = 27a^3 - 27a^2 + 9a - 1 + 1$ делится на 9, но не делится на 27. Являясь степенью тройки, $m^3 + 1$ может быть равно только 9, откуда $m = 2$, $n = 2$.

3. **Ответ**: ± 1 и $(-153 \pm \sqrt{19184}) / 65$. **Решение**. Пусть $A = 7x + 3$, $B = 3x + 7$, $C = 6x - 2$, $D = 2x - 6$. Уравнение перепишем в виде $A^4 - B^4 = C^4 - D^4$ и обе части дважды разложим по формуле разности квадратов. $(A - B)(A + B)(A^2 + B^2) = (C - D)(C + D)(C^2 + D^2)$. Заметим, что $A - B = 4x - 4$, $A + B = 10x + 10$, $C - D = 4x + 4$, $C + D = 8x - 8$.

Подставим: $40(x - 1)(x + 1)(A^2 + B^2) = 32(x - 1)(x + 1)(C^2 + D^2)$. Подстановкой в исходное уравнение убеждаемся, что $x = 1$ и $x = -1$ являются решениями.

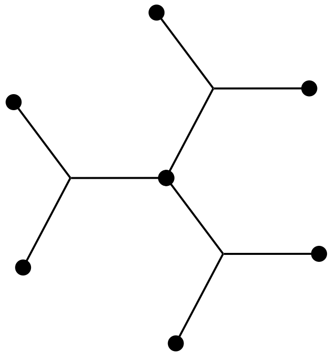
Пусть $x \neq \pm 1$. Разделим обе части на $8(x - 1)(x + 1)$. Получим $5(A^2 + B^2) = 4(C^2 + D^2)$, или $5((7x + 3)^2 + (3x + 7)^2) = 4((6x - 2)^2 + (2x - 6)^2)$.

Преобразуем: $5(58x^2 + 84x + 58) = 4(40x^2 - 48x + 40)$, или $130x^2 + 612x + 130 = 0$. Решая квадратное уравнение, находим ещё два корня: $(-153 \pm \sqrt{19184}) / 65$.

4. **Ответ**: можно. **Решение**. Например, разделим правильный шестиугольник на шесть равносторонних треугольников, и в трёх из них (никакие два из этих трёх

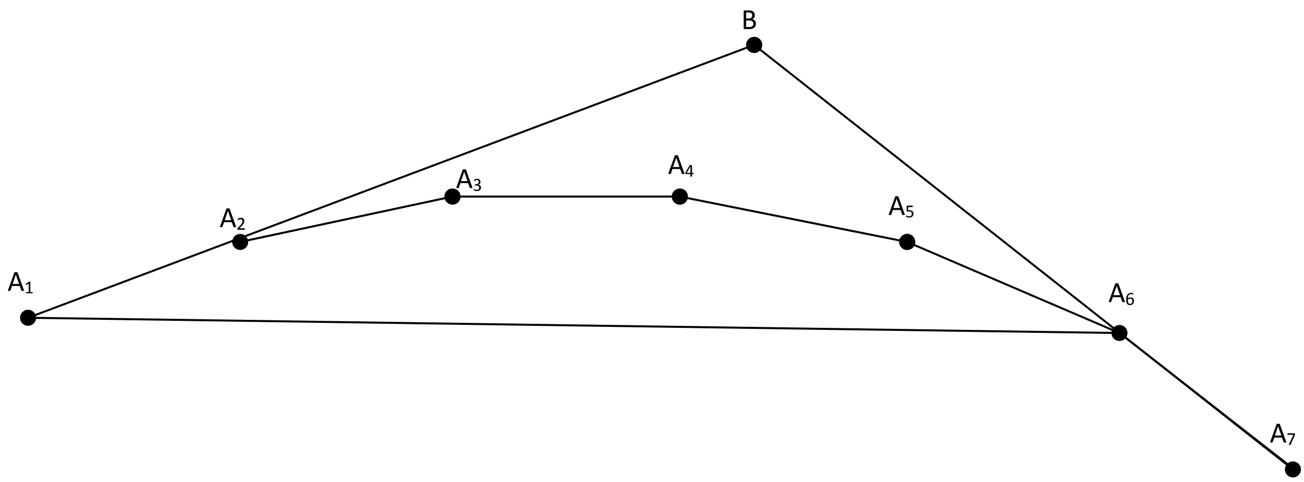
треугольников не должны быть соседними) соединим центр треугольника с вершинами (см. рисунок).

Длина стороны каждого из равносторонних треугольников равна 100 км. Длина высоты (также являющейся медианой) равностороннего треугольника равна $100 \cdot (\sqrt{3} / 2) = 50\sqrt{3}$ км. Длина отрезка от точки пересечения медиан до вершины равностороннего треугольника равна $50\sqrt{3} \cdot (2 / 3) = (100\sqrt{3}) / 3$ км. Всего проведено 9 дорог такой длины; их суммарная длина $9 \cdot (100\sqrt{3}) / 3 = 300\sqrt{3}$ км, что меньше, чем 519,616 км.



5. **Решение**. Рассмотрим правильный 36-угольник $A_1A_2...A_{36}$. Пусть B – точка пересечения лучей A_1A_2 и A_7A_6 (см. рисунок), O – центр описанной окружности 36-угольника. Заметим, что $\angle A_1A_6A_7 = 150^o$ (вписанный угол, опирающийся на дугу $A_7A_8...A_{36}A_1$. градусная мера которой равна $30 : 36 \cdot 360^o = 300^o$), $\angle A_1A_6B = 30^o$ (как смежный с предыдущим), $\angle A_2A_1A_6 = 20^o$ (вписанный угол, опирающийся на дугу $A_2A_3...A_6$, градусная мера которой равна $4 : 36 \cdot 360^o = 40^o$), $\angle A_1BA_6 = 180^o – 30^o – 20^o = 130^o$ (находится из суммы углов треугольника A_1BA_6).

Пусть треугольник A_1BA_6 – это торт. Разрежем его ломаной $A_2A_3A_4A_5A_6$ на две части. Затем повернём шестиугольную часть $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ вокруг центра 36-угольника так, что она перейдёт в $A_2A_3A_4A_5A_6A_7$. Легко видеть, после поворота что части торта помещаются в коробку A_2BA_7, симметричную торту относительно прямой OB.



7 класс

К задаче 1.

Критерий 1. Доказано, что лжецов не меньше 6, но пример с 6 лжецами не построен. **5 баллов**.

Критерий 2. Построен пример с 6 лжецами (т.е. указано, что сказал каждый из 10 человек, и какое у него число на карточке) и написано, каково количество лжецов в этом примере. Не доказано, что не может быть меньше 6 лжецов. **2 балла**.

Критерий 3. Более детальная проверка примера, чем описано в предыдущем критерии, не требуется (в частности, не требуется про каждого из 10 человек выписывать, кем он является, и почему). За отсутствие проверки примера баллы не снижаются.

Критерий 4. Только верный ответ. **0 баллов**.

К задаче 2.

Критерий 1. Верный ответ без дальнейших содержательных продвижений. **1 балл**

Критерий 2. В случайном порядке приведены примеры 12 расстановок. Нет доказательства невозможности других расстановок. **3 балла**

Критерий 3. Если в процессе поиска ответа на вопрос задачи используются различные комбинаторные соображения, они оцениваются положительными баллами в случае полноты рассуждений (доведения до ответа), и оцениваются **0 баллов** в противном случае.

Критерий 4. Если ответ неверный из-за вычислительной ошибки, оценка уменьшается на **1 балл**. Если ответ неверный из-за того, что использован неверный способ подсчёта, то, как правило, ставится **от 0 до 2 баллов** за задачу.

К задаче 3.

Критерий 1. Верное разрезание **6 баллов**. Если оно выполнено, оставшийся **1 балл** ставится за верные расчёты.

Критерий 2. Если верное разрезание не найдено, но имеются расчёты, связанные с площадью квадрата и количеством тех и других фигур, за них можно ставить **от 0 до 1 балла** в зависимости от их полезности для решения задачи.

К задаче 4.

Критерий 1. Если два самых тяжёлых яблока найдены за большее, чем требовалось, количество взвешиваний, то ставится **не более 2 баллов**, если в «худшем» случае (когда требуется больше всего действий) участник справился за 22 взвешивания (или быстрее). И **не более 1 балла**, если в «худшем» случае участник справился за 29 взвешиваний (или быстрее), но не справился за 22 взвешивания.

Критерий 2. Если самое тяжёлое яблоко найдено во всех случаях, но второе по тяжести яблоко найдено не во всех случаях, ставится **0 баллов**.

К задаче 5.

Критерий 1. Ожидается, что большинство участников, которые решат эту задачу, решат её так, как написано в первом решении (возможно, с некоторыми вариациями). В первом решении никаких продвижений, которые было бы можно оценивать положительными баллами, нет; ожидается, что все, кто будут рассматривать площади граней кирпичей, прилегающих к грани коробки 15 x 18 см, решат эту задачу. Т.е. рекомендуется ставить **7 баллов** в случае полностью решённой задачи, и 0 баллов в противном случае. Вычислительные ошибки, не влияющие на ход решения, уменьшают оценку на **1 балл**.

Критерий 2. В рамках второго и третьего решений верная пространственная раскраска (или верное распределение масс) без дальнейших содержательных продвижений оценивается в **3 балла**. Решений с раскрасками (и тем более – с массами) ожидается немного.

8 класс

К задаче 1.

Критерий 1. Верный ответ. **0 баллов**

Критерий 2. Верный пример (36 апельсинов, 31 банан, 8 груш) с проверкой или без неё. **2 балла**

Критерий 3. Доказано, что количество плодов делится на 25. **2 балла**

Критерий 4. Замечено, что количество бананов + количество груш нечётно. **1 балл**

Критерий 5. Если задача не решена, но в работе имеются два или три продвижения из числа сформулированных в трёх предыдущих критериях, ставится **3 балла** за задачу.

К задаче 2.

Критерий 1. Верно указано количество взвешиваний без дальнейших содержательных продвижений. **0 баллов**.

Критерий 2. Приведён верный алгоритм, позволяющий выяснить требуемое за не более, чем 2 взвешивания, но отсутствует (или неверное, или неполное) доказательство того, что алгоритм во всех случаях позволяет определить требуемое за не более, чем 2 взвешивания. **2 балла**. Неполный алгоритм (например, указано только верное первое взвешивание) положительными баллами не оценивается.

Критерий 3. Кроме верного алгоритма, приведено также доказательство того, что алгоритм во всех случаях позволяет определить требуемое за не более, чем 2 взвешивания. Ставится 2 балла за алгоритм, 2 балла за его обоснование, всего **4 балла**.

Критерий 4. Доказано, что не существует алгоритма, позволяющего определить требуемое за одно взвешивание. **3 балла**. Скорее всего, способы доказательства, отличающиеся от рассмотренного здесь, неверны. Неполные доказательства положительными баллами не оцениваются. Если доказательство верное, 3 балла за него суммируются с баллами за продвижения в алгоритме (в случае наличия продвижений согласно двум предыдущим критериям).

К задаче 3.

Критерий 1. Полное решение задачи для частного случая (для треугольника с конкретными углами, удовлетворяющими условию) **0 баллов**, если это решение не может быть перенесено на общий случай без дополнений / изменений.

Критерий 2. При решении задачи в общем случае верно выполненное разрезание без дальнейших содержательных продвижений оценивается в **4 балла**. Если, кроме того, показано, как части разместить в треугольной коробке, оценка увеличивается до **5 баллов**. Оставшиеся **2 балла** ставятся за полное обоснование того, что части поместятся в коробку.

Критерий 3. Ошибки в подсчёте углов, не оказывающие влияния на ход рассуждений, уменьшают оценку за задачу на **1 балл**.

К задаче 4.

Критерий 1. Верный ответ («существует»). **0 баллов**

Критерий 2. Верный пример (т.е. число 63 или число 89) оценивается в **3 балла**. Оставшиеся **4 балла** выставляются за полное доказательство того, что пример удовлетворяет условию задачи.

Критерий 3. В случае, **если верный пример не найден**, отдельные рассуждения могут быть оценены ненулевыми баллами. Например, если участник доказал, что все такие числа не могут быть больше 100 и не могут оканчиваться на 0, 2, 4, 5, 6, 8, за всё перечисленное вместе можно ставить **2 балла**. Эти баллы **не суммируются** с баллами за предыдущий критерий.

К задаче 5.

Критерий 1. Неполный перебор в переборном решении **0 баллов**.

9 класс

К задаче 1.

Критерий 1. Верный ответ без дальнейших содержательных продвижений **0 баллов**.

Критерий 2. Уравнение преобразовано к виду «сумма двух квадратов равна 0» без дальнейших содержательных продвижений. **3 балла**.

Критерий 3. За любое количество вычислительных ошибок (если они не приводят к тому, что решить задачу становится невозможно) снимается в совокупности **1 балл**.

К задаче 2.

Критерий 1. Верный ответ («существуют») при отсутствии примера **0 баллов**.

Критерий 2. Набор чисел, удовлетворяющих условию задачи, оценивается в **6 баллов**. Набор чисел может быть построен неявно (например, предъявлена формула, при подстановке в которую чисел от 1 до 2023 получаются числа набора).

Критерий 3. Оставшийся балл ставится за полную проверку того, что набор чисел удовлетворяет условиям а), б), в).

К задаче 3.

Критерий 1. Полное решение задачи для частного случая (для треугольника с конкретными углами, удовлетворяющими условию) **0 баллов**, если это решение не может быть перенесено на общий случай без дополнений / изменений.

Критерий 2. При решении задачи в общем случае верно выполненное разрезание без дальнейших содержательных продвижений оценивается в **4 балла**. Если, кроме того, показано, как части разместить в треугольной коробке, оценка увеличивается до **5 баллов**. Оставшиеся **2 балла** ставятся за полное обоснование того, что части поместятся в коробку.

Критерий 3. Ошибки в подсчёте углов, не оказывающие влияния на ход рассуждений, уменьшают оценку за задачу на **1 балл**.

Критерий 4. Оценка за верно выполненное разрезание (**4 балла**) уменьшается на **1 балл**, если не доказано, почему разрезание можно выполнить. В первом решении таким доказательством является сравнение углов ϕ и $180^\circ - 3\phi$, во втором решении – вычисление длины отрезка AE через сторону AB и угол ϕ. В решениях другим способом, где возможность разрезания более очевидна, чем в нашем решении, балл за отсутствие объяснения, почему разрезание возможно, может не сниматься.

К задаче 4.

Критерий 1. Если три самых тяжёлых яблока найдены за большее, чем требовалось, количество взвешиваний, то ставится **не более 2 баллов**, если в «худшем» случае (когда требуется больше всего действий) участник справился за 170 взвешиваний (или быстрее). И **не более 1 балла**, если в «худшем» случае участник справился за 220 взвешиваний (или быстрее), но не справился за 170 взвешиваний.

Решения, в которых участнику требуется больше 220 взвешиваний, положительными баллами не оцениваются. За 294 взвешивания найти требуемое можно, например, так: сначала за 99 взвешиваний найти самое тяжёлое яблоко (каждый раз сравнивая самое тяжёлое из найденных яблок с новым и оставляя на весах то, что тяжелее); затем аналогично за 98 взвешиваний найти второе по тяжести яблоко, и за 97 взвешиваний – третье по тяжести.

Критерий 2. Идея построения «турнирной сетки» в виде двоичного дерева (как на рисунке в решениях). **1 балл**. Этот балл не суммируется с баллами за предыдущий критерий.

Критерий 3. Если самое тяжёлое яблоко найдено во всех случаях, но второе и/или третье по тяжести яблоко найдено не во всех случаях, ставится **0 баллов**.

К задаче 5.

Критерий 1. В решении первым способом (выигрышные и проигрышные позиции) всё верно, за исключением того, что не разобраны позиции, в которых количество монет в белой шкатулке больше 14. Оценка снижается на **1 балл**.

Критерий 2. В решении первым способом (выигрышные и проигрышные позиции) при верном способе вычисления выигрышных и проигрышных позиций допущены 1-2 ошибки. Оценивается **не выше 3 баллов**.

Критерий 3. Если задача решена таким способом, в котором требуется обосновать, почему игра рано или поздно закончится, а такое обоснование не предъявлено (или неверно). Оценка снижается на **1 балл**.

Критерий 4. Доказано, что суммарное количество монет в шкатулках всегда нечётно, а также замечено, что всего будет сделано 14 ходов, уменьшающих количество монет в шкатулке на две. При отсутствии дальнейших содержательных продвижений **не выше 1 балла за задачу**.

Критерий 5. При решении третьим способом (система условий, из которой следует, что Алексей не может проиграть, как бы не играли оба игрока) верное составление системы условий оценивается в **2 балла**, а решение системы – в оставшиеся **5 баллов**. Если решение системы не завершено (например, получены выводы из предыдущего критерия, но не получено противоречие), баллы за решение системы не ставятся.

Критерий 6. Решения, в которых Алексею рекомендуется, начиная с некоторого момента, повторять ходы соперника, скорее всего, ошибочны (в этом случае за решение ставится **0 баллов**), так как повторение ходов возможно не всегда. Например, если первый ход Алексея (15, 14) $\to$ (13, 14), то он не всегда сможет повторить ход, уменьшающий количество монет в белой шкатулке.

10 класс

К задаче 1.

Критерий 1. Верный ответ без дальнейших содержательных продвижений. **0 баллов**.

Критерий 2. Верный пример a, b, c, при которых неравенство неверно **не менее 6 баллов**. Оставшийся балл не ставится, если проверка примера отсутствует или выполнена с ошибками.

К задаче 2.

Критерий 1. Верный ответ. Кроме того, доказано, что частное от деления числа Ани на число Вики не может быть ничем иным, кроме 2, 3, 4, 5, 6. Без дальнейших содержательных продвижений. **0 баллов**

Критерий 2. Доказано, что частное не может быть кратно 3. **1 балл**

Критерий 3. Доказано, что частное не может давать остаток 2 при делении на 3. **2 балла**

Критерий 4. Доказано, что частное не равно 4. **3 балла**

Критерий 5. Если задача не решена полностью, но выполнены два или три предыдущих критерия, баллы за выполненные критерии складываются.

К задаче 3.

Критерий 1. Разрезание может быть выполнено не в виде рисунка, а в виде полного текстового описания (но без рисунка). Засчитывается, как если бы это был рисунок.

Критерий 2. Если найдены только два разрезания из трёх (например, как на левом и среднем рисунках), решение оценивается из максимума **2 балла**.

Критерий 3. Если найдены все три разрезания, за них ставится **не меньше 6 баллов**. Оставшийся балл выставляется за обоснование, почему треугольники в разных разрезаниях не равны. Т.е. при отсутствии обоснования этот балл не прибавляется к оценке. Насколько подробным должно быть обоснование для того, чтобы засчитывать (не снимать) этот балл, решает жюри. Достаточно для треугольников каждого цвета указать сторону или угол, отсутствующие у треугольников остальных цветов.

Критерий 4. За наличие ошибок в расчётах, не делающих конструкцию ошибочной, снимается **1 балл**.

К задаче 4.

Критерий 1. Верный ответ без дальнейших содержательных продвижений. **1 балл**

Критерий 2. Приведены примеры всех 288 расстановок. Количество расстановок верно подсчитано. Нет доказательства невозможности других расстановок. **3 балла**

Критерий 3. Если в процессе поиска ответа на вопрос задачи используются различные комбинаторные соображения, они оцениваются положительными баллами в случае полноты рассуждений (доведения до ответа), и оцениваются **0 баллов** в противном случае.

Критерий 4. Если ответ неверный из-за вычислительной ошибки – оценка уменьшается на **1 балл**. Если ответ неверный из-за того, что использован неверный способ подсчёта, то, как правило, ставится **от 0 до 2 баллов** (обычно **0 баллов**) за задачу.

К задаче 5.

Критерий 1. Полное решение задачи для произвольного остроугольного треугольника **не выше 3 баллов**. Таким решением, например, является первое из двух решений задачи 3 в 9 классе.

Критерий 2. Если задача решена для треугольника с произвольными углами (а не только остроугольного), верно выполненное разрезание без дальнейших содержательных продвижений оценивается в **4 балла**. Если, кроме того, показано, как части разместить в треугольной коробке, оценка увеличивается до **5 баллов**. Оставшиеся **2 балла** ставятся за полное обоснование того, что части поместятся в коробку.

Критерий 3. Ошибки в подсчёте углов, не оказывающие влияния на ход рассуждений, уменьшают оценку за задачу на **1 балл**.

Критерий 4. Оценка за верно выполненное разрезание (**4 балла**) уменьшается на **1 балл**, если не пояснено, почему разрезание можно выполнить. Например, таким доказательством является вычисление длины отрезка AE через сторону AB и угол ϕ. В решениях другим способом, где возможность разрезания более очевидна, чем в нашем решении, балл за отсутствие объяснения, почему разрезание возможно, может не сниматься.

11 класс

К задаче 1.

Критерий 1. В переборном решении рассмотрены не все случаи. **0 баллов**.

Критерий 2. Доказано, что количество способов распределить 12 гирек не меньше, чем количество способов распределить 11 гирек. Но не доказано, что больше. **5 баллов**.

К задаче 2.

Критерий 1. Верный ответ. **1 балл**

Критерий 2. Выполнено разложение на множители $(m + 1)(m^2 – m + 1)$ и замечено, что каждая скобка равна целой неотрицательной степени тройки. **1 балл**

Критерий 3. Баллы за продвижения из двух предыдущих критериев суммируются (если имеются оба продвижения).

К задаче 3.

Критерий 1. Предъявлены только корни 1 и -1. **0 баллов**

Критерий 2. Задача сведена к решению квадратного уравнения, которое не решено или решено неверно. **4 балла**

Критерий 3. В случае потери любого из корней 1 и -1 (или обоих вместе) оценка уменьшается на **3 балла**.

Критерий 4. Уменьшения оценки по двум предыдущим критериям суммируются (если в работе имеются оба недостатка). Сокращение на $x^2 – 1$ (без рассмотрения случая, когда $x^2 – 1$ обращается в 0), сведение к квадратному уравнению и неверное решение квадратного уравнения – всё это вместе стоит **1 балл**.

К задаче 4.

Критерий 1. Построен верный пример системы дорог **6 баллов**.

Критерий 2. Оставшийся **1 балл** ставится за расчёты. В случае наличия любых проблем в обосновании примера (как вычислительных, так и других, вплоть до отсутствия обоснования примера) балл за расчёты не ставится.

Критерий 3. Построен пример системы дорог, суммарная длина которых больше 550 км, но меньше 600 км. Решение оценивается из максимума в **2 балла** (из них 1 балл за пример и 1 балл за расчёты).

К задаче 5.

Критерий 1. Верно выполненное разрезание без дальнейших содержательных продвижений оценивается в **4 балла**. Если, кроме того, показано, как части разместить в коробке, оценка увеличивается до **5 баллов**. Оставшиеся **2 балла** ставятся за полное обоснование того, что части поместятся в коробку.

Критерий 2. Ошибки в подсчёте углов, не оказывающие влияния на ход рассуждений, уменьшают оценку за задачу на **1 балл**.

Критерий 3. Оценка за верно выполненное разрезание (**4 балла**) уменьшается на **1 балл**, если не доказано, почему разрезание можно выполнить, и если возможность разрезания не очевидна из описанного в работе способа разрезания. В очевидных ситуациях этот балл не снимается.